**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**«Кемеровский государственный университет»**

**«УТВЕРЖДАЮ»**
**Директор института фундаментальных наук**

**Е.Г. Газенаур**

# ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

**в магистратуру по направлению подготовки**

**01.04.01 Математика**

**Профиль (направленность) подготовки**

**Преподавание математики и информатики**

**в 2026 году**

**КЕМЕРОВО 2026**

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 00AAEDD5461FD53813B964A5488C8CD20B
Владелец: Просеков Александр Юрьевич
Действителен: с 18.06.2025 до 11.09.2026

Форма проведения вступительных испытаний: ***тест.***
Общая продолжительность вступительного испытания – 3 часа (180 минут).
Результаты оцениваются по 100-балльной шкале.

В испытаниях варианты тестовых заданий по 12 вопросов (заданий) в каждом варианте.

Нижний порог прохождения – 30 баллов.

В программе представлены:

- образцы тестов и их оценка;
- содержание блоков тем, на основе которых составлены тесты;
- основная и дополнительная литература.

**Апелляции** по вступительным испытаниям принимаются на следующий день после опубликования результатов.

## Образцы тестов и их оценка

**Вопрос 1**. Ядро и образ линейного отображения векторных пространств.

**Вопрос 2**. Какое отображение называется линейным?

**Вопрос 3**. Свойства гиперболы.

**Вопрос 4**. Понятие евклидова пространства.

**Вопрос 5**. Понятие ортонормированного базиса.

**Вопрос 6**. Формула Грина.

**Вопрос 7**. Как находится радиус сходимости степенного ряда?

**Вопрос 8**. Что такое комплексное число, модуль и аргумент комплексного числа?

**Вопрос 9**. Найти производную функции $f(x) = \frac{\sin(2^x)}{\cos(x^2)}$.

**Вопрос 10**. Найти интеграл $\int \ln x dx$.

**Вопрос 11**. Предприятие выпускает емкости объёмом 100 л. в форме прямоугольного параллелепипеда. При этом, для соединения боковых граней используются дорогостоящие угловые соединения трех видов: для одной пары противоположных ребер основания стоимость 1 м угловых соединений первого типа равна 125$, для другой пары противоположных ребер основания стоимость 1 м угловых соединений второго типа равна 75$, а для боковых ребер стоимость 1 м угловых соединений третьего типа равна 200$. Найти при каких размерах емкости расходы по закупке уголков будут минимальными.

**Вопрос 12**. После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 20. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени *T* рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента *T*?

*Варианты оценивания ответов*

**Вопрос 4**. Понятие евклидова пространства.

Правильный ответ – 5 баллов, неправильный ответ – 0 баллов.

*Правильный ответ*: Векторное пространство V называется евклидовым, если на нем задано скалярное произведение, т.е. билинейная симметричная положительно определенная функция двух векторных аргументов.

**Вопрос 5**. Понятие ортонормированного базиса.

Правильный ответ – 5 баллов, неправильный ответ – 0 баллов.

*Правильный ответ*: Базис в евклидовом пространстве называется ортонормированным, если все его векторы взаимно ортогональны и имеют длину, равную единице.

**Вопрос 11**. Предприятие выпускает емкости объёмом 100 л. в форме прямоугольного параллелепипеда. При этом, для соединения боковых граней используются дорогостоящие угловые соединения трех видов: для одной пары противоположных ребер основания стоимость 1 м угловых соединений первого типа равна 125$, для другой пары противоположных ребер основания стоимость 1 м угловых соединений второго типа равна 75$, а для боковых ребер стоимость 1 м угловых соединений третьего типа равна 200$. Найти при каких размерах емкости расходы по закупке уголков будут минимальными.

*Этапы оценивания решения.*

**5 баллов**. Введены искомые переменные $x$, $y$, $z$ – длины боковых ребер. При этом отмечено, что $x$ – это длина ребра основания 1-го типа и таких ребер 2, $y$ – это длина ребра основания 2-го типа и таких ребер 2, $z$ – это длина вертикального бокового ребра и таких ребер 4. Составлена функция стоимости всех ребер.

**10 баллов**. Составлена функция стоимости всех ребер. Выписано условие $x\,y\,z = 100$. Сформулирована задача отыскания условного минимума. Записана функция Лагранжа.

**15 баллов**. Найдены необходимые условия локального условного экстремума и найдены точки, в которых возможен локальный экстремум.

**20 баллов**. Сформулированы достаточные условия локального условного экстремума и найдены точки, в которых возможен локальный экстремум. Приведено решение задачи с незначительными ошибками или недочетами;

**25 баллов** – полное правильное решение задачи.

**Вопрос 12**. После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени $T$ рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента $T$?

*Этапы оценивания решения.*

**5 баллов**. Введены необходимые переменные: $k$ – число проголосовавших зрителей, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ – выставленные ими оценки. Составлена формула для вычисления рейтинга $T$.

**10 баллов**. Составлена формула для вычисления рейтинга $T$. Доказано, из какого максимального значения рейтинга (указанного в задаче целого значения $T$) должны исходить для получения наибольшее количество зрителей. Указано, при каких значениях $n_1, n_2, \ldots, n_k$ это достигается.

**15 баллов**. Представлено решение в частном случае, когда максимальное значение рейтинга 10 при одном проголосовавшем.

**20 баллов**. Дополнительно доказано, что наибольшее количество зрителей может быть получено только в том случае, когда мы исходим из максимального значения рейтинга 10 при одном проголосовавшем.

**25 баллов** – полное правильное решение задачи.

## Содержание блоков тем, на основе которых составлены тесты

I. Алгебра и геометрия

**Алгебра**

Понятие группы, кольца и поля. Поле комплексных чисел. Кольцо многочленов. Деление многочленов с остатком. Теорема Безу. Кратность корня многочлена, ее связь со значениями производных. Разложение многочлена на неприводимые множители над полями комплексных и действительных чисел. Формулы Виета; наибольший общий делитель многочленов, его нахождение с помощью алгоритма Евклида. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Симметрические многочлены.

Группа подстановок, четность подстановки. Циклические группы. Разложение группы на смежные классы по подгруппе.

Векторные пространства, базис и размерность. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Прямые суммы.

Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к нормальному виду. Закон инерции. Положительно определенные квадратичные формы.

Линейные отображения векторных пространств, их задание матрицами. Ядро и образ линейного отображения. Матрицы оператора в различных базисах. Собственные векторы и собственные значения. Достаточные условия приводимости матрицы линейного у оператора к диагональному виду. Понятие о жордановой нормальной форме.

Евклидовы пространства. Скалярное произведение. Ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации. Ортогональные и унитарные матрицы. Линейный оператор, сопряженный к данному. Симметрические и эрмитовы линейные операторы, их спектр. Соответствие между билинейными формами и линейными операторами. Приведение квадратичной формы к главным осям.

**Геометрия**

Прямые линии и линии второго порядка на плоскости. Квадратичные функции на плоскости и их матрицы. Ортогональные инварианты квадратичных функций. Приведение уравнения линий второго порядка к каноническому виду. Свойства эллипса, гиперболы и параболы.

Плоскости и поверхности второго порядка в пространстве. Теорема о канонических уравнениях поверхностей второго порядка (без доказательства). Эллипсоиды; гиперболоиды; параболоиды. Цилиндры.

Кривизна плоской кривой. Эволюта и эвольвента. Пространственные кривые, репер Френе, кривизна и кручение пространственных кривых. Формулы Френе, натуральное уравнение кривой.

Поверхности в $\mathbf{R}^3$, способы задания поверхностей. Координаты на поверхности, касательная плоскость и нормаль. Первая квадратичная форма

поверхности, площадь поверхности. Вторая квадратичная форма и ее свойства. Средняя и гауссова кривизны поверхности.

## 2. Математический анализ

Действительные числа. Полнота множества **R**. Существование точной верхней (нижней) грани числового множества, принцип вложенных отрезков.

Предел числовой последовательности, основные свойства сходящихся последовательностей и признаки существования предела. Предельные точки множества и теорема Больцано-Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности. Предел монотонной последовательности. Подпоследовательности, верхний и нижний пределы. Критерий Коши существования предела.

Предел функции в точке, основные свойства. Непрерывные функции. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность композиции. Свойства непрерывных функций на отрезке (теоремы Вейерштрасса, Кантора, о промежуточном значении).

Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения: теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о конечных приращениях. Раскрытие неопределенностей. Локальная формула Тейлора. Разложения элементарных функций. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций: признаки постоянства, монотонность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба, асимптоты.

Определенный интеграл Римана. Суммы Римана и Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции и ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла, теорема о среднем значении. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Существование первообразной от непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница, Замена переменной, интегрирование по частям. Длина дуги и другие геометрические, механические и физические приложения.

Функции многих переменных. Евклидово пространство $n$ измерений. Основные метрические и топологические характеристики множеств евклидова пространства, открытые и замкнутые множества и их свойства. Предел, непрерывность функции многих переменных. Свойства непрерывных функций. Дифференцируемость функции, дифференциал и частные производные функции многих переменных. Производная по направлению, градиент. Дифференцирование сложных функций. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций нескольких переменных. Локальные экстремумы, необходимые условия, достаточные условия локального экстремума.

Отображения $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$, их дифференцирование, матрица производной.

Числовые ряды. Сходимость и сумма числового ряда, критерий Коши. Знакопостоянные ряды, теоремы сравнения. Признаки сходимости Даламбера, Коши, интегральный признак сходимости. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость. Понятие о бесконечных произведениях.

Функциональные последовательности и ряды, равномерная сходимость. Признаки равномерной сходимости. Свойства предельной функции функциональной последовательности и суммы функциональной ряда. Степенные ряды, радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Свойства суммы степенного ряда. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Ряд Тейлора. Ряды с комплексными членами, формулы Эйлера.

Несобственные интегралы. Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций, признаки сходимости.

Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость, непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру. Эйлеровы интегралы и их свойства.

Ряды Фурье. Ортогональные системы функций, тригонометрическая система. Ряд Фурье. Сходимость ряда Фурье в точке. Принцип локализации. Минимальное свойство частных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Достаточное условие разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье. Равенство Парсеваля.

Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от формы пути интегрирования. Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода. Формула Остроградского. Формула Стокса.

## 3. Теория функций комплексного переменного

Комплексные числа, модуль и аргумент. Сфера Римана. Евклидова и сферическая метрика. Топология на **C,** области, пути и кривые на C.

Предел функции, непрерывность в **C** и в расширенной комплексной плоскости. **C**-дифференцируемость, аналитичность функции. Условия Коши-Римана. Свойства аналитических функций. Критерий аналитичности для класса непрерывно дифференцируемых функций. Конформные и локально-конформные отображения. Геометрический смысл модуля и аргумента для производной от аналитической функции. Гидродинамическая и геометрическая интерпретация для аналитической функции. Комплексный потенциал векторных полей на плоскости.

Степенные ряды, аналитичность суммы степенного ряда, почленное

дифференцирование степенных рядов. Гармонические функции. Свойства гармонических функций. Степенная функция, экспоненциальная функция и им обратные. Функция Жуковского. Многозначные аналитические функции. Дробно-линейные отображения, Основные свойства. Круговое свойство. Симметрия. Инверсии. Дробно-линейные изоморфизмы и автоморфизмы.

## 4. Функциональный анализ

Определение линейного нормированного пространства, примеры норм. Банаховы пространства. Линейные операторы, норма оператора. Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе. Компактные операторы. Компактность интегральных операторов.

Гильбертовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Общий вид линейного функционала. Самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы. Ортогональные системы. Неравенство Бесселя. Базисы в гильбертовом пространстве.

Линейные топологические пространства и обобщенные функции. Полинормированные пространства. Пространства Фреше. Функционал Минковского. Нормируемость и метризуемость.

Основные примеры функциональных пространств: $L^1$, $L^p$ ($p > 1$), $C^0$, $C^k$, $C^\infty$.

## 5. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы первого порядка. Понятие решения. Уравнения и системы порядка выше первого и их сведение к системам первого порядка. Автономные и неавтономные уравнения. Динамические системы. Геометрические понятия, связанные с дифференциальными уравнениями. Фазовое пространство и расширенное фазовое пространство. Поле направлений, интегральные кривые. Векторное поле, фазовые кривые (траектории). Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения. Приемы интегрирования некоторых специальных классов обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения в полных дифференциалах и интегрирующие множители. Уравнения Бернулли и Риккати.

Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Пространство решений. Фундаментальная система решений. Характеристическое уравнение. Общее решение. Линейное однородное уравнение n-ого порядка с постоянными коэффициентами: пространство решений, характеристическое уравнение, общее решение. Линейные неоднородные системы уравнений с постоянными коэффициентами: общие свойства, метод вариации постоянных, частное решение системы с правой частью в виде квазимногочлена. Линейное неоднородное уравнение n-ого порядка с постоянными коэффициентами.

## Основная и дополнительная литература


1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. УРСС, 2001.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
3. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. Москва, МГУ, 1967.
4. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М., Наука, 1974.
5. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. - М.: Наука, 2010.
6. Зорич В.А. Математический анализ. Том 1. М.: МЦНМО, 2012.
7. Зорич В.А. Математический анализ. Том 2. М.: МЦНМО, 2012.
8. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. - М.: Высшая школа, 2000.
9. Демидович. Б.П. Сборник задач и упражнений по мат.анализу, М.:Наука, 1972г. (и другие издания).
10. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т.1, 2, 3-е изд. М. Лань 1, 2012.
11. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. 15-е изд. Лань М., 2012.
12. Краснов М. Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Задачи и примеры с подробными решениями. Академия 2012.
13. Маркушевич А.И. Краткий курс аналитических функций. М.: Паука, 1978.
14. Лаврентьев М.А., Шабат В.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
15. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович.И.Г. "Сборник задач но теории функций комплексного переменного". Москва: Наука, 1972.
16. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. ФИЗМАТЛИТ, 2004.
17. Треногин В.А. Функциональный анализ. ФИЗМАТЛИТ, 2002.
18. Федоров В. М. Курс функционального анализа. Лань, 2005.
19. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
20. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. 3-е изд., стер. СПб.: Издательство «Лань», 2008.
21. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во МГУ, 1984.
22. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1974.